Fiche 102 Niveau : 1 **Jaune**

Fonctions convexes

1 Introduction

Le problème présenté dans cette fiche, tourne autour des fonctions convexes. Ce domaine est très large et a de multiples applications. Le lecteur intéressé par un survol de la question pourra se reporter à l'article de l'*encyclopædia Universalis* intitulé « fonctions convexes » article repris dans le livre *Dictionnaire des mathématiques* publié par encyclopædia Universalis et Albin Michel (Paris, 1997). Ici, nous donnons deux exemples (partie I et partie II) et pour chacun d'eux nous partons d'une fonction convexe particulière, nous introduisons sa transformée de Legendre (Adrien-Marie Legendre 1752 - 1833), établissons l'inégalité de Young (William Henry Young 1863 - 1942) et en tirons une application : étude d'une certaine série dans la partie I, inégalité de Hölder pour la partie II.

2 Problème

On va donner deux exemples de fonctions convexes et à partir de ces exemples montrer qu'on peut associer à une telle fonction une autre fonction convexe duale. On en tirera une inégalité intéressante. Chaque exemple débouche sur une application.

Partie I - Un exemple de fonction convexe

On considère la fonction M de l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\ln(x)} & \text{si} \quad x \in]0,1[, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1) Étude de la fonction

a) Montrer que M est dérivable sur $[0,1[$ et que M' est une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. Représenter graphiquement M'.

b) Soit q la fonction réciproque de M'. Vérifier que q est intégrable sur tout intervalle $[0,y]$ où $0 \leq y < 1$. On pose alors pour tout $y \in [0,1[$,

$$N(y) = \int_0^y q(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que si $0 \leq x < 1$ et $0 \leq y < 1$ l'inégalité suivante (inégalité de Young) est vérifiée :

$$xy \leq M(x) + N(y). \tag{1}$$

2) Application à l'étude d'une série. On se propose d'étudier la série

$$\sum_{n>1} N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Soit $(b_n)_n$ une suite réelle telle que $0 < b_n < 1$.

a) Montrer que

$$\frac{b_n}{\ln(n)} \leq \frac{b_n}{\ln\left(\frac{1}{b_n}\right)} + N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

b) Montrer que pour $y > 0$,

$$0 \leq q(y) \leq e^{-\frac{1}{y}}$$

puis que

$$N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \leq \int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} \mathrm{d}u.$$

c) Montrer que lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$

$$\int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} \mathrm{d}u \sim \frac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^2}.$$

En déduire la nature de la série

$$\sum_{n>1} N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

d) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes > 0 et $\neq 1$. Montrer que si la série $\sum_n \frac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge, alors la série $\sum_n \frac{u_n}{\ln(n)}$ converge.

3) On va proposer au passage une démonstration directe de la convergence de la série introduite dans la question 2) d) dont on reprend les notations.

a) Montrer qu'on peut toujours supposer sans perte de généralité que $u_n < 1$.

b) Soit

$$P = \left\{ n \mid u_n \leq \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Étudier dans chacun des deux cas $n \in P$ et $n \notin P$ une majoration intéressante de $\frac{u_n}{\ln(n)}$ et conclure.

Partie II - Application à l'inégalité de Hölder

1) Reprise à partir d'une autre fonction convexe. Soit un nombre réel $p > 1$. On considère maintenant pour fonction M la fonction $M(x) = \frac{x^p}{p}$.

a) Utiliser une démarche analogue à celle de la partie 1 pour associer à M une fonction N. Quelle est cette fonction N ?

b) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$ on a l'inégalité suivante :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

c) Montrer que pour toute suite $(a_n)_n$ et toute suite $(b_n)_n$ on a dans $\overline{\mathbb{R}}$ l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{n\geq 1} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n\geq 1} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\geq 1} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3 Solution

Partie I - Un exemple de fonction convexe

1) Étude de la fonction

a) Sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ la fonction $\ln(x)$ ne s'annulle pas, donc la fonction $M(x)$ est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables et sa dérivée est

$$M'(x) = \frac{1-\ln(x)}{\big((\ln(x)\big)^2}.$$

Il reste à voir la dérivée à gauche en 0. Pour cela on étudie le rapport :

$$\frac{M(x)-M(0)}{x} = -\frac{1}{\ln(x)},$$

rapport qui admet pour limite 0 quand on fait tendre x vers 0^+. La fonction M est donc dérivable sur $[0,1[$ avec une dérivée positive. Remarquons que cette dérivée est continue sur $[0,1[$. en effet :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln(x)}{\big((\ln(x)\big)^2} = 0.$$

Étudions maintenant la dérivabilité de M'. La fonction M' est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables avec pour dérivée :

$$M''(x) = \frac{\ln(x)-2}{x\,\big(\ln(x)\big)^3} > 0.$$

La fonction $M'(x)$ n'est pas dérivable en 0. Par ailleurs on a le comportement suivant lorsqu'on fait tendre x vers 1^- :

$$\lim_{x\to 1^-} M'(x) = +\infty.$$

En conclusion la fonction $M'(x)$ est continue sur $[0,1[$, dérivable avec une dérivée strictement positive sur $]0,1[$, Elle est donc strictement croissance sur $[0,1[$ et tend vers $+\infty$ lorsqu'on fait tendre x vers 1^-. Ceci permet de conclure que $M'(x)$ est une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$.

Remarque 3.1 *Si on suppose simplement connu le théorème pour une fonction continue strictement croissante sur un intervalle compact, on peut raisonner de la façon suivante. Soit $y_0 \in [0,+\infty[$. Il existe nombre $a \in [0,1[$ tel que pour tout $x \geq a$ on ait $M'(x) > y_0$. Ce qui montre déjà qu'à l'extérieur de l'intervalle $[0,a]$ on ne pourra trouver aucun point x tel que $f(x) = y_0$. Regardons maintenant ce qu'il se passe sur l'intervalle $[0,a]$. Comme M' est continue et strictement croisante, c'est une bijection de l'intervalle compact $[0,a]$ sur l'intervalle compact $[0,M'(a)]$. Le point y_0 est dans ce dernier intervalle, il existe donc un unique point $x_0 \in [0,a]$ tel que $M'(x_0) = y$. En conclusion, pour tout $y \in [0,+\infty[$ il existe un point x et un seul tel que $M'(x) = y$.*

b) Comme M' est bijective, sa fonction réciproque q existe. Soit $y \in [0,+\infty[$ et $a \in [0,1[$ tel que $M'(a) > y$. La fonction M' est une bijection continue du compact $[0,a]$ sur le compact $[0,M'(a)]$, sa fonction réciproque qui est la restriction à $[0,M'(a)]$ de q est donc continue. Donc q est continue en tout point y et donc continue sur $[0,+\infty[$. En conséquence q est intégrable. Nous étudions

$$M(x) + N(y) = \int_0^x p(u)\mathrm{d}u + \int_0^y q(v)\mathrm{d}v,$$

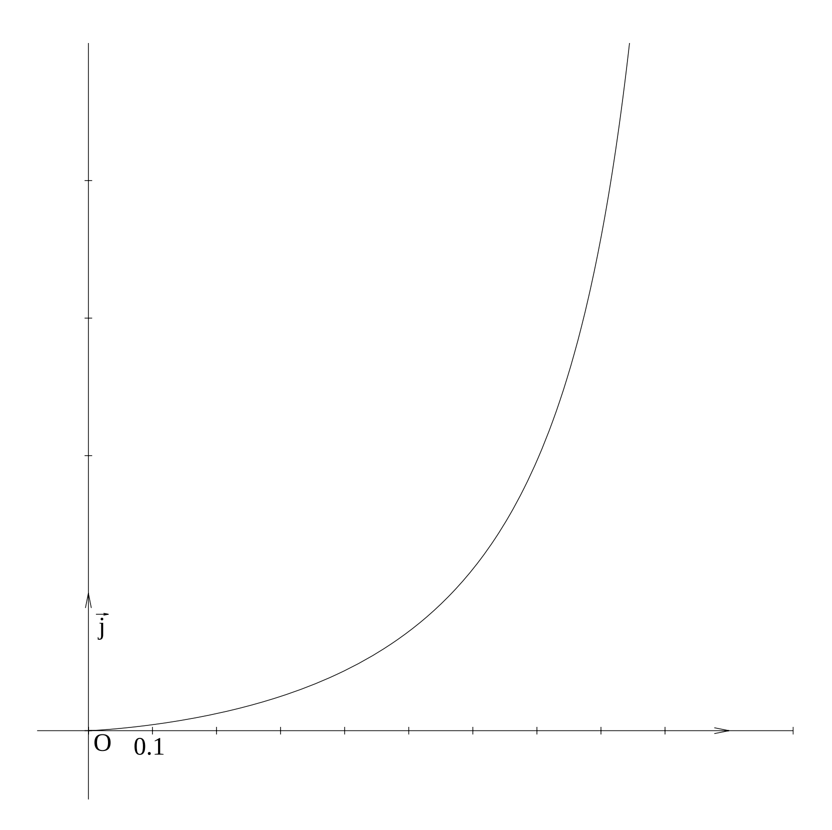


FIG. 1 – tracé de $M(x)$

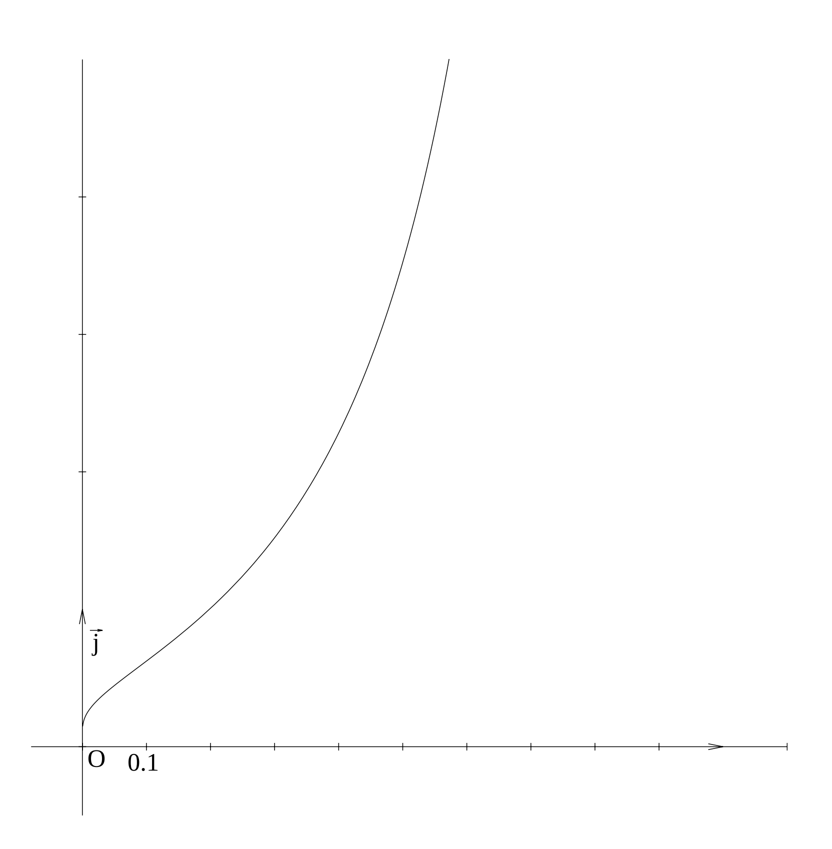


FIG. 2 – tracé de $M'(x)$

où pour une meilleure symétrie des notations $p(x)$ désigne la fonction $M'(x)$. Si $y \geq p(x)$ on pose $y_0 = p(x)$. Remarquons que si $y \leq p(x)$ alors $q(y) \leq q(p(x)) = x$ (p et q sont croissantes et réciproques l'une de l'autre). Comme p et q jouent le même rôle, on peut donc toujours se ramener au cas où $y \geq p(x)$. On a donc successivement :

$$\int_0^y q(u)\mathrm{d}u = \int_0^{y_0} q(u)\mathrm{d}u + \int_{y_0}^y q(u)\mathrm{d}u.$$

Mais si $u \geq y_0$ alors $q(u) \geq q(y_0) = q\big(p(x)\big) = x$, donc :

$$\int_0^y q(u)\mathrm{d}u \geq \int_0^{y_0} q(u)\mathrm{d}u + x(y - y_0).$$

On obtient donc :

$$M(x) + N(y) \geq \int_0^x p(u)\mathrm{d}u + \int_0^{y_0} q(u)\mathrm{d}u + x(y - y_0).$$

Nous allons montrer que :

$$\int_0^x p(u)\mathrm{d}u + \int_0^{y_0} q(u)\mathrm{d}u = xy_0,$$

ce qui apparaît clairement quand on interprète ces deux intégrales comme des aires qui recouvrent exactement un rectangle, en n'oubliant pas bien entendu que $p(x)$ et $q(x)$ sont réciproques l'une de l'autre. Voici les détails. Introduisons le domaine

$$D = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq x, \text{ et } p(u) \leq v \leq y_0\}.$$

Ce domaine s'écrit aussi :

$$D = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq y_0, \text{ et } 0 \leq u \leq q(v)\}.$$

En effet si (u, v) vérifie le conditions de la première écriture alors comme $p(u) \leq v \leq y_0$ on a bien entendu aussi $0 \leq v \leq y_0$, mais aussi $q\big(p(u)\big) \leq q(v) \leq q(y_0)$ et comme $q\big(p(u)\big) = u$ on déduit que $u \leq q(v)$. En conclusion le couple (u, v) vérifie aussi les conditions de la deuxième écriture. On peut faire de la même façon la démonstration qui montre qu'un couple (u, v) qui vérifie les conditions de la deuxième écriture vérifie les conditions de la première. Écrivons alors l'aire du domaine D de deux façons, obtenues directement grâce aux deux présentations différentes de D :

$$\iint_D \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^x \left(\int_{p(u)}^{y_0} \mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u = \int_0^x \big(y_0 - p(u)\big)\, du = xy_0 - \int_0^x p(u)du,$$

et par ailleurs :

$$\iint_D \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{y_0} \left(\int_0^{q(v)} \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}v = \int_0^{y_0} q(v)\mathrm{d}v.$$

On déduit donc ce qu'on voulait, c'est-à-dire :

$$\int_0^x p(u)\mathrm{d}u + \int_0^{y_0} q(u)\mathrm{d}u = xy_0.$$

Donc

$$M(x) + N(y) \geq xy_0 + x(y - y_0),$$

$$M(x) + N(y) \geq xy.$$

Nous remarquerons qu'on a égalité si et seulement si $y_0 = y$, c'est-à-dire si $y = p(x)$.

2) Application.

a) Appliquons l'inégalité précédente avec $x = b_n$ et $y = \frac{1}{\ln(n)}$, on obtient exactement l'inégalité demandée.

b) Remarquons que comme p est définie sur $[0,1[$, la bijection réciproque a son image dans $[0,1[$, et donc $q(y) < 1$. De ce fait $\ln\big(q(y)\big) < 0$. Ceci sera utilisé pour manipuler les inégalités qui suivent. On a successivement :

$$p\left(q(y)\right) = \frac{1 - \ln\big(q(y)\big)}{\big(\ln\left(q(y)\right)\big)^2},$$

$$y = \frac{1 - \ln\big(q(y)\big)}{\big(\ln\left(q(y)\right)\big)^2},$$

$$y\big(\ln\left(q(y)\right)\big)^2 = 1 - \ln\big(q(y)\big),$$

$$y\big(\ln\left(q(y)\right)\big)^2 \geq -\ln\big(q(y)\big),$$

$$y \geq -\frac{1}{\ln\big(q(y)\big)},$$

$$\ln\big(q(y)\big) \leq -\frac{1}{y},$$

$$q(y) \leq e^{-\frac{1}{y}}.$$

On écrit d'après la définition :

$$N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) = \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} q(u)\mathrm{d}u.$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ sur chaque intervale d'intégration $\left[\epsilon, \frac{1}{\ln(n)}\right]$ puis en tenant compte de la convergence de l'intégrale introduite sur $[\ln(n), +\infty]$ on obtient :

$$N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) = \int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{1}{t^2} q\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t,$$

ce qui donne :

$$N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \leq \int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

c) Pour étudier l'intégrale du second membre, faisons une intégration par partie de façon à exhiber une partie principale et un reste :

$$\int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t}}{t^2}\right]_{\ln(n)}^{+\infty} - 2\int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}\mathrm{d}t,$$

(toutes les limites écrites existent). Lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$, la dernière intégrale est un petit o de l'intégrale du premier membre puisque la fonction qu'on intégre est un petit o de la fonction qu'on intègre dans le premier membre. Donc :

$$\int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t \sim \frac{1}{n\big(\log(n)\big)^2}.$$

En conséquence la série à termes positifs $N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ a son terme général majoré par le terme général d'une série de Bertrand convergente. Cette série est donc aussi convergente.

d) On a vu que

$$\frac{b_n}{\ln(n)} \leq \frac{b_n}{\ln\left(\frac{1}{b_n}\right)} + N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Si la série de terme général $\frac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge, le terme général tend vers 0, ce qui veut dire qu'à partir d'un certain rang la valeur absolue de ce terme est < 1, soit encore $-\ln(n) < u_n < \ln(n)$. Une étude rapide des fonctions $x + \ln(x)$ et $x - \ln(x)$ nous montre qu'alors $u_n < 1$. On peut donc appliquer les résultats précédents. On suppose donc maintenant que $u_n < 1$. Les deux séries de termes généraux respectifs $-\frac{u_n}{\ln(u_n)}$ et $N\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ sont à termes positifs et convergentes. On conclut que la série de terme général $\frac{u_n}{\ln(n)}$ est convergente.

3) Une démonstration directe.

a) Cette partie a déjà été faite pour la question 2) d)

b) Si $n \in P$ alors

$$\frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{n^2 \ln(n)}.$$

Si $n \notin P$ alors

$$u_n > \frac{1}{n^2},$$

ce qui implique que

$$\ln\left(\frac{1}{u_n}\right) < 2\ln(n),$$

et donc que

$$\frac{u_u}{\ln(n)} < \frac{u_n}{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}.$$

On conclut que la série de terme général $\frac{u_u}{\ln(n)}$ est convergente.

Partie II - Inégalité de Hölder

1) Nous allons reprendre très rapidement la démarche de la partie I

a) $M(x) = \frac{x^p}{p}$. Comme $p > 1$, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec comme dérivée $p(x) = x^{p-1}$. La fonction $p(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $p(x)$ est elle même dérivable sauf en zéro dans le cas où $1 < p < 2$. La dérivée $p'(x)$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc $p(x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et définit une bijection croissante de $[0, +\infty[$ sur lui même. Notons $q(x)$ la fonction réciproque.

b) Si $q(x) = y$, c'est que $p(y) = x$, c'est-à-dire $y^{p-1} = x$ ou encore $y = x^{1/(p-1)}$. Posons $q-1 = 1/(p-1)$ alors $q = 1+1/(p-1) = p/p-1$. Donc $1/q = 1-1/p$, c'est-à-dire $1/p+1/q = 1$. On a alors $q(x) = x^{q-1}$ et par primitivation, $N(x) = \frac{x^q}{q}$. Le lecteur se convaincra que la démonstration faite dans la partie I de l'inégalité dde Young, ne fait intervenir que des propriétés qui sont aussi vérifiés par les fonctions $M(x)$ et $N(x)$ de cette partie. Donc, pour $x > 0$ et $y > 0$:

$$xy \leq M(x) + N(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

Remarquons encore, que si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité a encore lieu.

L'inégalité de Hölder se démondre maintenant simplement.

– Si l'une des deux suites est nulle, l'inégalité est vérifiée.
– Si

$$\left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=1$$

et

$$\left(\sum_{n\geq 1}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}=1$$

alors en sommant les inégalités de Young appliqués pour chaque indice n :

$$|a_nb_n|\leq\frac{|a_n|^p}{p}+\frac{|b_n|^q}{q},$$

on obtient

$$\sum_n|a_nb_n|\leq 1,$$

ce qui est l'égalité cherchée dans ce cas particulier.
– Sinon on applique le résultat pécédent aux deux suites de termes généraux

$$\frac{|a_n|}{\left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\quad\text{et}\quad\frac{|b_n|}{\left(\sum_{n\geq 1}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

ce qui donne le résultat.

Auteur : Robert Rolland
Diffusé par l'Association ACrypTA